

2026 年各地预赛数列题选解 1

1. 裂项求和

数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{2n+1} + 2\sqrt{n^2+n}},$$

前 n 项和为 S_n , 求 S_{24} 。

(2026 年全国高中数学联赛预赛, 广州赛区, 第 2 题; 原题录入有误)

解答: 因为

$$2n+1+2\sqrt{n^2+n}=(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})^2,$$

所以

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}.$$

因此

$$S_{24} = \sum_{n=1}^{24} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \sqrt{25} - \sqrt{1} = 4.$$

2. 递推数列与估值

数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = \sqrt{2}$, $a_{n+1} = \sqrt{a_n + 2}$, 求

$$\left\lfloor \sum_{k=1}^{2026} \frac{a_k}{2^k} \right\rfloor.$$

(2026 年全国高中数学联赛预赛, 浙江赛区, 第 2 题)

解答: 由归纳法可得 $\sqrt{2} \leq a_n < 2$ 。于是

$$\sqrt{2} \left(1 - \frac{1}{2^{2026}}\right) \leq \sum_{k=1}^{2026} \frac{a_k}{2^k} < 2 \left(1 - \frac{1}{2^{2026}}\right) < 2.$$

又 $\sqrt{2}(1 - 2^{-2026}) > 1$, 故

$$\left\lfloor \sum_{k=1}^{2026} \frac{a_k}{2^k} \right\rfloor = 1.$$

3. 等差数列与最值

设 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和。若

$$a_n^2 + \frac{S_n^2}{n^2} \geq \lambda a_1^2$$

对任何等差数列及正整数 n 恒成立，求 λ 的最大值。

(2026 年全国高中数学联赛预赛，广西赛区，第 3 题)

解答：等差数列满足

$$\frac{S_n}{n} = \frac{a_1 + a_n}{2}.$$

当 $a_1 = 0$ 时不等式显然成立；当 $a_1 \neq 0$ 时，令 $x = \frac{a_n}{a_1}$ ，则

$$\frac{a_n^2 + S_n^2/n^2}{a_1^2} = x^2 + \left(\frac{1+x}{2}\right)^2 = \frac{5}{4} \left(x + \frac{1}{5}\right)^2 + \frac{1}{5} \geq \frac{1}{5}.$$

故 $\lambda = \frac{1}{5}$ 可行。取 $n = 2$ ， $a_1 = 5$ ， $a_2 = -1$ ，等号成立，所以 λ 不可能更大。因此

$$\lambda_{\max} = \frac{1}{5}.$$

4. 递推数列与整数部分

数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 2$ ，

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n^2 - \frac{a_n(a_n - 1)}{n}},$$

求

$$\left\lfloor \sum_{i=1}^{2026} \left(\frac{a_i}{i}\right)^2 \right\rfloor.$$

(2026 年全国高中数学联赛预赛，江西赛区，第 6 题)

解答：易知 $1 < a_{n+1} < a_n$ ，故 $a_n^2 \leq 2$ ($n \geq 2$)。于是

$$\sum_{i=1}^{2026} \left(\frac{a_i}{i}\right)^2 < 4 + 2 \sum_{i=2}^{\infty} \frac{1}{i^2} = 2 + \frac{\pi^2}{3} < 6.$$

另一方面，由

$$a_{n+1}^2 = \left(1 - \frac{1}{n}\right) a_n^2 + \frac{a_n}{n}$$

及 $a_n > 1$ ，归纳可得

$$a_n^2 > 1 + \frac{1}{n-1} \quad (n \geq 3).$$

注意 $a_2^2 = 2$, 且 $a_3^2 = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$ 。因此

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{2026} \left(\frac{a_i}{i}\right)^2 &> 4 + \sum_{i=2}^{2026} \frac{1 + 1/(i-1)}{i^2} + \frac{(\sqrt{2}-1)/2}{9} \\ &= 5 - \frac{1}{2026} + \frac{\sqrt{2}-1}{18} > 5,\end{aligned}$$

其中使用了

$$\frac{1 + 1/(i-1)}{i^2} = \frac{1}{i(i-1)}.$$

故所求整数部分为 $\boxed{5}$ 。

5. 组合计数

在数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 0$, $a_{15} = 8$, 且

$$|a_{k+1} - a_k| = 2 \quad (k = 1, 2, \dots, 14),$$

求满足条件的数列个数。

(2026 年上海市高三数学竞赛, 第 7 题)

解答: 从 a_1 到 a_{15} 共有 14 步。设其中上升 2 的有 u 步, 下降 2 的有 d 步, 则

$$u + d = 14, \quad 2u - 2d = 8.$$

解得 $u = 9, d = 5$ 。只需从 14 步中任选 5 步下降, 故满足条件的数列共有

$$\binom{14}{5} = \boxed{2002}.$$